Chapitre 24

Développements limités

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre :

- le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.
- a est un point de I ou une extrémité **finie** de I.
- f et g designent des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Contrairement au chapitre précédent, le point a ne peut plus être infini. C'est donc un point de $\overline{I}$ avec la définition qui sera donnée en MP. De plus, on ne suppose plus g o-ïsable au voisinage de a (cf chapitre précédent). En effet, les termes $o(g(x))$ qu'on considérera seront écrits avec des fonctions g qui ne s'annulent par sur I tout entier, sauf éventuellement en a.

1 Introduction aux développements limités

1.1 Interprétations du petit-o

En supposant que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, on a l'équivalence suivante :

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \iff \begin{cases} \text{Il existe une fonction } \varepsilon : I \to \mathbb{K} \text{ tels que} \\ \forall x \in I \qquad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \qquad\qquad \text{et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Cela ressemble à la définition 23.3, sauf qu'ici la fonction ε est définie sur I tout entier. On peut en effet poser $\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$

On peut faire deux remarques sur cette réécriture :

- Alors que $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ est une limite, l'écriture $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ constitue une "vraie" égalité, valide pour tout $x \in I$, avec ε une fonction continue sur I. On pourra par exemple ajouter, soustraire, intégrer (etc.) des égalités de ce type comme on a l'habitude de le faire avec des équations.
- Cela permet d'interpréter un $o(g(x))$ comme étant un terme de la forme $\varepsilon(x)g(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Par exemple, avec $a = 0$ et $g(x) = x^n$, on peut considérer que

$$\underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad \text{"="} \quad x^n\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

  Cette intérpretation va entrainer des règles de calcul particulières, qu'on verra en section 1.4.

1.2 Généralités sur les DL

Si $h : I \to \mathbb{K}$, on écrit

$$f(x) = h(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$$

pour signifier que $f(x) - h(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$, donc que $f - h$ est négligeable devant g au voisinage de a. Cela revient à écrire

$$f(x) = h(x) + g(x)\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \varepsilon : I \to \mathbb{K} \quad \text{tq} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Dans la majorité des cas, on aura aussi $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$: cela veut donc dire que $f(x)$ est égale à $h(x)$ plus un terme d'erreur $g(x)\varepsilon(x)$ qui va tendre vers 0 quand x tend vers a, et ce plus "vite" encore que $g(x)$ seul.

Définition 24.1 (Développement limité)

On dit que f admet un DL à l'ordre n en a (ou un $DL_n(a)$) s'il existe $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ tels que

$$\forall x \in I \qquad f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

Cela équivaut à dire que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

On dira aussi (abusivement) qu'une expression $f(x)$ admet un $DL_n(a)$.

Propriété 24.2

La fonction f admet un DL à l'ordre n en a si et seulement si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un DL à l'ordre n en 0, càd s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et une fonction $\widetilde{\varepsilon} : I \to \mathbb{K}$ tels que

$$\forall h \in I \qquad f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + h^n \widetilde{\varepsilon}(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \widetilde{\varepsilon}(h) = 0$$

ou de manière équivalente

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

On passe d'une forme à l'autre en posant $x = a + h$ et $\widetilde{\varepsilon}(h) := \varepsilon(a+h)$. Grâce à cette propriété, quand on cherche le DL d'une fonction en a, on peut toujours se ramener à un DL d'une autre fonction en 0. On peut donc se contenter d'étudier les DL en 0, ce qu'on fera le plus souvent.

Remarque. f admet un DL à l'ordre n en a s'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$f(a+h) = P(h) + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

Le polynôme P est appelé la <u>partie régulière</u> du DL. Le terme $o(h^n)$ est appelé le <u>reste</u> du DL.

Exemple 1. La fonction $f : x \mapsto 1 - x^2 + x^2 \ln(1+x)$ admet un $DL_2(0)$, i.e. un DL à l'ordre 2 en 0. En effet, comme $\ln(1+x) = \underset{x \to 0}{o}(1)$, on a

$$x^2 \ln(1+x) = \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

et donc

$$f(x) = 1 - x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

Notons que f admet aussi un $DL_1(0)$ car $-x^2 + x^2 \ln(1+x) = \underset{x \to 0}{o}(x)$, et donc

$$f(x) = 1 + \underset{x \to 0}{o}(x)$$

Exemple 2 (Exemple important)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un $DL_n(0)$.

Exemple 3 (Exemple important bis)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ admet un $DL_n(0)$.

1.3 Signe $=$ avec des petit-o

On a vu précédemment que $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+ \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+ \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On aimerait alors écrire :

$$"1+x+ \underset{x\to 0}{o}(x) \quad = \quad 1+x+x^2+ \underset{x\to 0}{o}(x^2)"$$

Pourtant, en toute généralité, cette égalité est fausse. En simplifiant par $1+x$, cela reviendrait à écrire " $\underset{x\to 0}{o}(x) \quad = \quad x^2+ \underset{x\to 0}{o}(x^2)$". Or :

- Un $o(x)$ ne peut pas forcément s'écrire $x^2+o(x^2)$. Par exemple $x^{3/2} = \underset{x\to 0}{o}(x)$ mais $x^{3/2} \neq x^2+ \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. En effet :

- Cependant, il est vrai que $x^2+o(x^2)$ peut se réécrire en $o(x)$. En effet :

En conclusion, on peut écrire $x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = \underset{x\to 0}{o}(x)$, mais on ne peut pas écrire $\underset{x\to 0}{o}(x) = x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Avec des petit-$o$ (et idem pour des grand-O), la relation $=$ n'est plus une relation d'équivalence : elle reste réflexive et transitive, mais n'est plus symétrique. À tel point qu'oralement, on lira parfois ce signe $=$ en disant "est un" au lieu de "égal" :

- Un $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ est un $\underset{x\to 0}{o}(x)$: $\quad x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = \underset{x\to 0}{o}(x)$
- Mais un $\underset{x\to 0}{o}(x)$ n'est pas (nécessairement) un $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

Remarque. Ces règles peuvent sembler perturbantes, mais il faut se dire qu'elles n'interviennent que lorsqu'on veut modifier des $o(\dots)$. Si on les laisse tels quels, alors le signe $=$ est bien symétrique. Le signe égal qui suit est par exemple symétrique :

$$(1+x)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = 1 + 2x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Exemple 4. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. On peut transformer (de manière irréversible) un $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ en un $\underset{x\to 0}{o}(x^m)$ en écrivant $\underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^m)$.

1.4 Règles de calcul avec des o

À cause de la subtilité ci-dessus, on dispose des règles de calcul suivantes avec des petit-o (on omet les "$x \to 0$" en indice) :

$$\begin{array}{rrcl} & o(x^n) \pm o(x^n) & = & o(x^n) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}^* & \lambda o(x^n) & = & o(\lambda x^n) = o(x^n) \\ & o(x^n) & = & x^n o(1) \\ & o(x^n) o(x^m) & = & o(x^{n+m}) \end{array}$$

Par exemple :

$$\begin{array}{rll} o(x^n) - o(x^n) & = x^n \varepsilon_1(x) - x^n \varepsilon_2(x) & \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0 \\ & = x^n (\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) & \\ & = x^n \widetilde{\varepsilon}(x) & \text{avec} \quad \widetilde{\varepsilon} := \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ & = o(x^n) & \text{car} \quad \lim_{x\to 0} \widetilde{\varepsilon}(x) = 0 \end{array}$$

Les fonctions ε_1 et ε_2 sont a priori différentes, donc on ne peut pas dire que $\widetilde{\varepsilon}$ est nulle. Par contre, par différence de limite, on sait que $\lim_{x\to 0} \widetilde{\varepsilon}(x) = 0$.

Exemple 5. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Alors : $\quad \underset{x\to 0}{o}(x^m) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad = \quad \dots\dots\dots\dots$

Exemple 6. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Alors : $\quad \underset{x\to 0}{o}(x^m + x^n) \quad = \quad \dots\dots\dots\dots$

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\quad \underset{x\to 0}{o}\left(\underset{x\to 0}{o}(x^n)\right) \quad = \quad \dots\dots\dots\dots$

2 Propriétés des DL

2.1 Premières propriétés

Théorème 24.3 (Unicité du DL)

Si f admet un $DL_n(a)$, ce DL (à l'ordre n) est unique, i.e. la partie régulière associée à ce DL est unique.

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour $a=0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $a_0,\cdots,a_n \in \mathbb{K}$ et $b_0,\cdots,b_n \in \mathbb{K}$ tels que $(a_0,\cdots,a_n) \neq (b_0,b_1,\cdots,b_n)$ et

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Alors, par différence, on trouve

$$0 = (b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x + \cdots + (b_n - a_n)x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Par hypothèse, $(b_0 - a_0,\cdots,b_n - a_n) \neq (0,\cdots,0)$. On note $p \in [\![0,n]\!]$ le plus petit entier tel que $b_p - a_p \neq 0$. Alors

$$0 = (b_p - a_p)x^p + \cdots + (b_n - a_n)x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

En divisant par x^p, pour tout $x \neq 0$, on obtient

$$0 = (b_p - a_p) + \underbrace{(b_{p+1} - a_{p+1})x + \cdots + (b_n - a_n)x^{n-p} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-p})}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$$

d'où $b_p - a_p = 0$. Contradiction. D'où le résultat. □

Théorème 24.4 (DL et parité)

On suppose que f admet un DL à l'ordre n **en zéro** :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

- Si f est paire, alors pour tout indice k impair, $a_k = 0$.
- Si f est impaire, alors pour tout indice k pair, $a_k = 0$.

Démonstration. On fait la preuve uniquement dans le cas où f est paire. Alors

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (-1)^n a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Or, f étant paire, on a $f(x) = f(-x)$. Par unicité du DL, on en déduit que les parties régulières ci-dessus sont égales :

$$a_0 = a_0 \qquad a_1 = -a_1 \qquad a_2 = a_2 \qquad \ldots \qquad a_n = (-1)^n a_n$$

c'est-à-dire $a_k = (-1)^k a_k$ pour tout k. Ainsi, si k est impair, nécessairement $a_k = 0$. □

Théorème 24.5 (Troncature du DL)

On suppose que f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Alors, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, f admet un $DL_p(a)$, obtenu en tronquant la partie régulière (on garde les termes de degré 0 à p) :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + \underset{x\to 0}{o}(x^p)$$

Démonstration. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Si $p = n$, c'est évident. Si $p < n$, on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + x^{p+1} \left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p-1} + \underset{x \to 0}{o}(x^{n-p-1}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^p) \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

2.2 Liens entre DL, continuité, dérivabilité

Propriété 24.6 ($DL_0(a)$ **et continuité en** a)

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f admet un $DL_0(a)$ donné par $f(x) = a_0 + \underset{x \to a}{o}(1)$
2. f admet une limite finie en a.

Et dans ce cas on a $a_0 = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

En particulier :

- Si f est définie en a alors $a_0 = f(a)$ et f est continue en a.
- Si f n'est pas définie en a, alors on peut la prolonger par continuité en a en posant $f(a) := a_0$.

Propriété 24.7 ($DL_1(a)$ **et dérivabilité en** a)

On suppose f définie en a. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f admet un $DL_1(a)$ donné par $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \underset{x \to a}{o}(x - a)$
2. f est dérivable en a.

Et dans ce cas, on a $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

Si f n'est pas définie en a et vérifie l'assertion 1, alors on peut la prolonger en une fonction dérivable en a. En effet, après troncature de l'assertion 1, on a $f(x) = a_0 + \underset{x \to a}{o}(1)$, et donc f est prolongeable par continuité en a. Si on note $\tilde{f}$ ce prolongement, alors $\tilde{f}$ vérifie l'assertion 1 et est définie en a. Donc $\tilde{f}$ est dérivable en a.

Remarque (Erreur fréquente)**.** Si f admet un $DL_n(a)$ avec $n \geq 2$, on ne peut pas en déduire que f est n fois dérivable en a. Contre-exemple : on pose

$$f(x) := x^3 \sin \frac{1}{x^2} = 0 + 0x + 0x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

Donc f admet un $DL_2(0)$. Pourtant, on va montrer que f n'est pas deux fois dérivable en zéro.

La section suivante montre cependant que si f est de classe C^n sur I et que $a \in I$, alors f admet un $DL_n(a)$.

2.3 Formule de Taylor-Young, DL usuels

Théorème 24.8 (Formule de Taylor-Young)

On suppose que $a \in I$. Si f est de classe C^n sur I, alors f admet un $DL_n(a)$ donné par

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$
$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

Démonstration. Sera démontrée plus loin dans le chapitre. □

En remplaçant h par $x-a$ (donc $a+h$ par x), on obtient une autre version :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$$

En particulier, si f est de classe C^∞ sur I, elle admet un DL à tout ordre en tout point de I. La formule de Taylor-Young permet de déduire les DL des fonctions usuelles, cf le formulaire. Ce formulaire est à connaitre !

Exemple 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $DL_n(0)$ de exp.

Exemple 9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le $DL_n(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$.
f est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$, donc par la formule de Taylor-Young elle admet un $DL_n(0)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on montre par récurrence que

$$\begin{aligned} f(x) &= & \qquad\qquad\qquad\qquad f(0) &= \\ f'(x) &= & f'(0) &= \\ f''(x) &= & f''(0) &= \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= & f^{(n)}(0) &= \end{aligned}$$

Donc

$$(1+x)^\alpha =$$

Connaissant le DL de $(1+x)^\alpha$ en 0 à tout ordre, on peut en déduire le DL de x^α en tout point à tout ordre par des jeux de réécriture et de composition :

Exemple 10. Déterminer le DL à l'ordre 3 en 2 de $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

2.4 Opérations sur les DL

Propriété 24.9 (Opérations sur les DL)

On suppose que f, g admettent des $DL_n(a)$, de parties régulières $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ respectivement. Alors :

1. **Combinaison linéaire** : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(a)$ de partie régulière $P + Q$.
2. **Produit** : la fonction fg admet un $DL_n(a)$ de partie régulière PQ mais “tronquée” au degré n.
3. **Composition** : soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$, u une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I. Si :
   - $\lim\limits_{t \to b} u(t) = a$
   - u admet un $DL_n(b)$ (et f admet un $DL_n(a)$)

   alors $f \circ u$ admet un $DL_n(b)$. En pratique, quitte à changer u et f, on peut toujours se ramener au cas $a = b = 0$. Dans ce cas, si

   $$\begin{aligned} f(h) &= a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n) \\ u(h) &= 0 + [b_1 h + \cdots + b_n h^n] + \underset{h \to 0}{o}(h^n) \qquad\qquad (b_0 = a = 0) \end{aligned}$$

   alors

   $$(f \circ u)(h) = a_0 + a_1 [\cdots] + a_2 [\cdots]^2 + \cdots + a_n [\cdots]^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

   et il suffit de tronquer le membre de droite au degré n pour obtenir le DL.
4. **Inverse** : si $g(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{1}{g}$ admet un $DL_n(a)$. En pratique, on pose $G(h) = g(a + h)$ pour se ramener au calcul du $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{G}$, et on calcule de la façon suivante :

   $$\begin{aligned} \frac{1}{G(h)} &= \frac{1}{b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \cdots + \underset{h \to 0}{o}(h^n)} \qquad\qquad b_0 = G(0) = g(a) \neq 0 \\ &= \frac{1}{b_0} \times \frac{1}{1 - \left[\frac{b_1 h + \cdots + b_n h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n)}{-G(0)}\right]} \\ &= \frac{1}{b_0} \times \left(1 + [\cdots] + [\cdots]^2 + \cdots + [\cdots]^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n)\right) \end{aligned}$$

Exemple 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction ch.

On peut montrer de la même manière la formule du $DL_{2n}(0)$ de sh.

Exemple 12. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\cos x + \sin x$ et de $\cos x \sin x$.

Exemple 13. Déterminer le $DL_4(0)$ de $\sqrt{\cos x}$.

Exemple 14. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\tan x$.

2.5 Intégrations de DL

On admet pour le moment l'inégalité de la moyenne : pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, donc avec $a \leq b$, on a $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. En particulier, si $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\left|\int_0^t f\right| \leq \int_0^t |f|$.

Propriété 24.10 (Intégration d'un DL)

On suppose que f est continue sur I. Soit F une primitive de f sur I. Si f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ donné par :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

Démonstration. On ne fait la preuve que dans le cas $a=0$. Par hypothèse, il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \tag{(*)}$$

La fonction ε est donc définie par :

$$\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{x^n} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Il est clair que ε est continue sur $I \setminus \{0\}$. De plus comme $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, la fonction ε est continue en 0. Elle est donc continue sur I. En particulier, toutes les fonctions de $(*)$ sont continues et donc on peut les intégrer. Soit $t \in I$. On intègre $(*)$ selon x entre 0 et t :

$$\int_0^t f(x)dx = \int_0^t \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \right) dx$$

$$\begin{aligned} F(t) - F(0) &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^t x^k dx + \int_0^t x^n \varepsilon(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^t + \int_0^t x^n \varepsilon(x) dx \end{aligned}$$

D'où

$$F(t) = F(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{t^{k+1}}{k+1} + \int_0^t x^n \varepsilon(x) dx$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\int_0^t x^n \varepsilon(x)dx \underset{t\to 0}{=} o(t^{n+1})$. Il suffit de montrer que $\lim\limits_{t\to 0,(t\neq 0)} \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t x^n \varepsilon(x) dx = 0$ (limite épointée en 0). Il suffit donc de montrer que la limite est nulle quand $t \to 0^+$ et quand $t \to 0^-$. On va faire la preuve uniquement pour $t \to 0^+$. Soit donc $t \in I \cap \mathbb{R}_+^*$. Par l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t x^n \varepsilon(x) dx \right| &\leq \int_0^t |x^n \varepsilon(x)| dx \\ &= \int_0^t x^n . |\varepsilon(x)| dx \qquad \text{car } x \in [0,t] \\ &\leq \int_0^t t^n . |\varepsilon(x)| dx \\ &= t^n . \int_0^t |\varepsilon(x)| dx \\ &\leq t^n . \int_0^t \max_{y\in[0,t]} |\varepsilon(y)| \, dx \\ &\leq t^n \max_{y\in[0,t]} |\varepsilon(y)| . \int_0^t dx \\ &= t^n \max_{y\in[0,t]} |\varepsilon(y)| . t \\ &= t^{n+1} \max_{y\in[0,t]} |\varepsilon(y)| \end{aligned}$$

Ainsi comme $t \neq 0$, on a

$$\left| \frac{\int_0^t x^n \varepsilon(x) dx}{t^{n+1}} \right| \leq \max_{y\in[0,t]} |\varepsilon(y)|$$

Or, comme $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on peut montrer que $\max\limits_{y\in[0,t]} |\varepsilon(y)| \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$. On en déduit que $\max\limits_{y\in[0,t]} |\varepsilon(y)| = \underset{t\to 0^+}{o}(1)$. D'où

$$\int_0^t x^n \varepsilon(x) dx = t^{n+1} \underset{t\to 0}{o}(1) = \underset{t\to 0}{o}(t^{n+1})$$

$\square$

Exemple 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $DL_n(0)$ de $F : x \mapsto \ln(1+x)$.

Exemple 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $DL_3(0)$ de arctan.

On peut obtenir de même les DL de arcsin et arccos.

Remarque (Preuve “vite faite” de Taylor-Young)**.** Soit $f \in C^n(I)$ et $a \in I$. Alors $f^{(n)}$ est continue et admet donc un $DL_0(a)$:

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a) + \underset{x \to a}{o}(1)$$

En intégrant ce DL, on trouve

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)x + \underset{x \to a}{o}(x)$$

et donc $f^{(n-1)}$ admet un $DL_1(a)$. En réintégrant :

$$f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(a) + f^{(n-1)}(a)x + f^{(n)}(a)\frac{x^2}{2} + \underset{x \to a}{o}(x^2)$$

donc $f^{(n-2)}$ admet un $DL_2(a)$, etc. Par récurrence, on montre donc que $f^{(0)} = f$ admet un $DL_n(a)$, donné par le Théorème 24.8.

Remarque (Erreur fréquente)**.** Si f est dérivable et admet un DL_n en a, on ne peut obtenir un DL_{n-1} de f' en a en “dérivant” celui de f. Il peut même arriver que f admette un $DL_n(a)$ mais que f' n'admette pas un $DL_{n-1}(a)$. Contre-exemple : on pose

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

On peut vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, f admet un $DL_1(0)$:

$$f(x) = 0 + 0x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Mais, supposons par l'absurde que f' admette un $DL_0(0)$. En particulier, f' serait continue en 0. Or, on peut vérifier que f' n'est pas continue en 0.

Remarque. Cependant, si f admet un $DL_n(a)$ **ET** si f' admet un $DL_{n-1}(a)$, alors on obtient le $DL_{n-1}(a)$ de f' en “dérivant” le $DL_n(a)$ de f.

3 Applications des développement limités

Dans le reste du chapitre, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.1 Obtention d'équivalents, étude du signe local d'une fonction

Définition 24.11 (Forme normalisée)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Si $(a_0, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$, en notant $p \in [\![0, n]\!]$ le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, on a

$$f(x) = \underbrace{a_p}_{\neq 0}(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Cette écriture est appelée <u>forme normalisée</u> du $DL_n(a)$ de f.

Cette forme normalisée permet d'obtenir un équivalent de f en a :

Théorème 24.12 (Passer d'un DL à un équivalent)

Supposons que f admet un $DL_n(a)$ sous forme normalisée :

$$f(x) = a_p(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Alors,

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$$

En particulier, f est du signe (strict) de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a.

On rappelle qu'on sait déjà passer d'un équivalent à un o : si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$. S'il se trouve que g est un polynôme, alors on a obtenu un DL de $f(x)$ en a.

Exemple 17. On pose $f : x \mapsto 3 + \ln(1+x) + \dfrac{x^2}{2}$. Donner l'équation de la tangente T à C_f en 0, puis la position relative de C_f par rapport à T (au voisinage de 0).

Remarque. Si $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$, alors la fonction f (ou son prolongement éventuel en a) vérifie $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$. En particulier, $y = a_0 + a_1(x-a)$ correspond exactement à l'équation de la tangente à f en a.

3.2 Extrema locaux : conditions du second ordre

Rappel : si a est un point *intérieur* de I (i.e. ce n'est pas une extrémité), si f est dérivable en a, et si f admet un extremum local en a, alors nécessairement a est un point critique, i.e. $f'(a) = 0$.

Il ne s'agit que d'une condition nécessaire : tout extremum local (intérieur à I) est un point critique, la réciproque est fausse : 0 est un point critique de $f(x) = x^3$, mais ce n'est pas un extremum local.

Propriété 24.13 (Conditions d'optimalité du second ordre)

Soit a un point intérieur de I et $f \in C^2(I)$.
Conditions nécessaires du second ordre :

- Si f admet un minimum local en a, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.
- Si f admet un maximum local en a, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \leq 0$.

Conditions suffisantes du second ordre :

- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local (strict) en a.
- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local (strict) en a.

Démonstration. Comme f est de classe C^2, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a implique qu'il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + h^2\varepsilon(h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Preuve des conditions nécessaires : on ne montre que le premier point. Si f admet un minimum local en a, alors

1. D'une part a est un point critique donc $f'(a) = 0$.
2. D'autre part, $f(a+h) - f(a) \geq 0$ pour h suffisament proche de zéro.

Ainsi, pour $|h|$ assez petit,

$$0 \leq 0 + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + h^2\varepsilon(h)$$

En divisant par h^2 et en prenant la limite quand h tend vers zéro, on obtient $\frac{1}{2}f''(a) \geq 0$. D'où le résultat.
Preuve des conditions suffisantes : on ne montre que le premier point. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}f''(a)h^2 + h^2\varepsilon(h) = \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2)$$

Comme $f''(a) > 0$, il s'agit d'un DL de $h \mapsto f(a+h) - f(a)$ sous forme normalisée. Ainsi,

$$f(a+h) - f(a) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{2}f''(a)h^2$$

et en particulier, $f(a+h) - f(a)$ a le même signe strict que $\frac{1}{2}f''(a)h^2$. Or, pour tout $h \neq 0$, on a $\frac{1}{2}f''(a)h^2 > 0$, donc $f(a+h) > f(a)$. Ainsi, a est un minimum local strict. □

Remarque. Si $f'(a) = f''(a) = 0$, tous les cas sont possibles (maximum, minimum, pas d'extremum en a). Par exemple $f(x) = x^2$ et $f(x) = \pm x^4$ avec $a = 0$.

Exemple 18. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f(x) = e^{x^3-3x}$.

On notera que la propriete 24.13 ne concerne que des extrema *locaux*, qui ne sont donc pas nécessairement globaux. Dans l'exemple ci-dessus, on peut vérifier qu'aucun extremum local n'est un extremum global.

3.3 Compléments

Dans cette section $\pm\infty$ désigne $+\infty$ ou $-\infty$ (ou bien tous les $\pm\infty$ désignent $+\infty$, ou bien tous les $\pm\infty$ désignent $-\infty$, comme "$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$").

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$.

La fonction f peut n'être définie qu'au voisinage de $\pm\infty$, mais on considère que $D_f = \mathbb{R}$ ici pour simplifier.

Méthode (Asymptote oblique en $\pm\infty$)

On cherche à savoir si une fonction f admet une asymptote oblique en $\pm\infty$.

1. On part de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$, et on pose $x = \dfrac{1}{u}$. On obtient ainsi une expression qui ne dépend que de u, qu'on note $F(u) = \dfrac{f(x)}{x}$.
2. On cherche un $DL_1(0)$ de F :
$$F(u) = a + bu + \underset{u\to 0}{o}(u)$$
Si F n'admet pas de $DL_1(0)$, alors f n'admet pas d'asymptote oblique en $\pm\infty$.
3. On réécrit $u = \dfrac{1}{x}$ pour obtenir
$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x} = a + b.\frac{1}{x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$
4. On multiplie tout par x et on obtient $f(x) = ax + b + \underset{x\to\pm\infty}{o}(1)$. Ainsi, f admet $y = ax + b$ comme asymptote oblique en $\pm\infty$.

Si en plus on cherche la position relative par rapport à l'asymptote oblique, alors il faut obtenir un DL de F avec un terme non nul supplémentaire. Par exemple, si F admet un $DL_2(0)$:

$$F(u) = a + bu + cu^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

- $\boxed{\text{Si } c \neq 0}$
$$f(x) - (ax+b) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{c}{x}$$
ce qui nous donne la <u>position relative de C_f par rapport à son asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$</u>, selon le signe de $\dfrac{c}{x}$ quand $x \to \pm\infty$.
- Si $c = 0$, il faut aller à un ordre plus élevé dans le DL de F jusqu'à ce qu'on trouve un terme non nul.
- Il est également possible que F n'admette pas de DL d'ordre 2 ou plus auquel cas, on ne peut pas rien dire.

Exemple 19. On pose $f(x) = x + 3 + \dfrac{\sin x}{x}$.

- Il est clair que $y = x + 3$ est asymptote oblique de f en $\pm\infty$. On voit également que $f(x) - (x+3) = \dfrac{\sin x}{x}$, qui change de signe périodiquement quand x tend vers $\pm\infty$.
- On va vérifier ce qu'il en est pour la fonction F dans ce cas...